中原工学院

Zhongyuan University of Technology

3　动量守恒定律和能量守恒定律

任课教师　[曾灏宪]

中原工学院　理学院

大学物理（上）

3 动量守恒定律和能量守恒定律

3.5 保守力与非保守力 势能

一　万有引力/重力、弹性力作功的特点

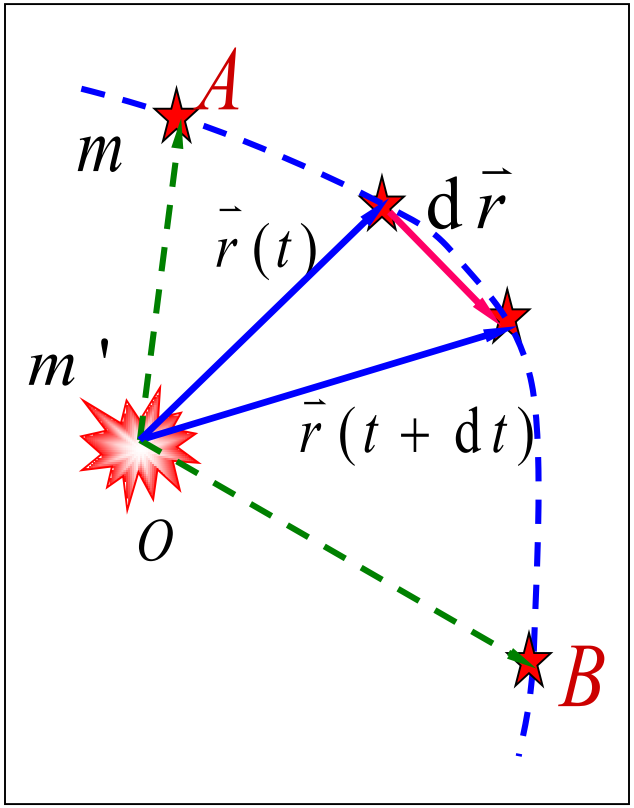
1. 万有引力作功

以m'为参考系，m 的位置矢量为 $\vec{r}$.

m' 对 m 的万有引力为

$$\vec{F} = -G\frac{m'm}{r^2}\vec{e}_r$$

r 方向单位矢量



m 移动$d\vec{r}$时，$\vec{F}$作元功为

$$dW = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -G\frac{m'm}{r^2}\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

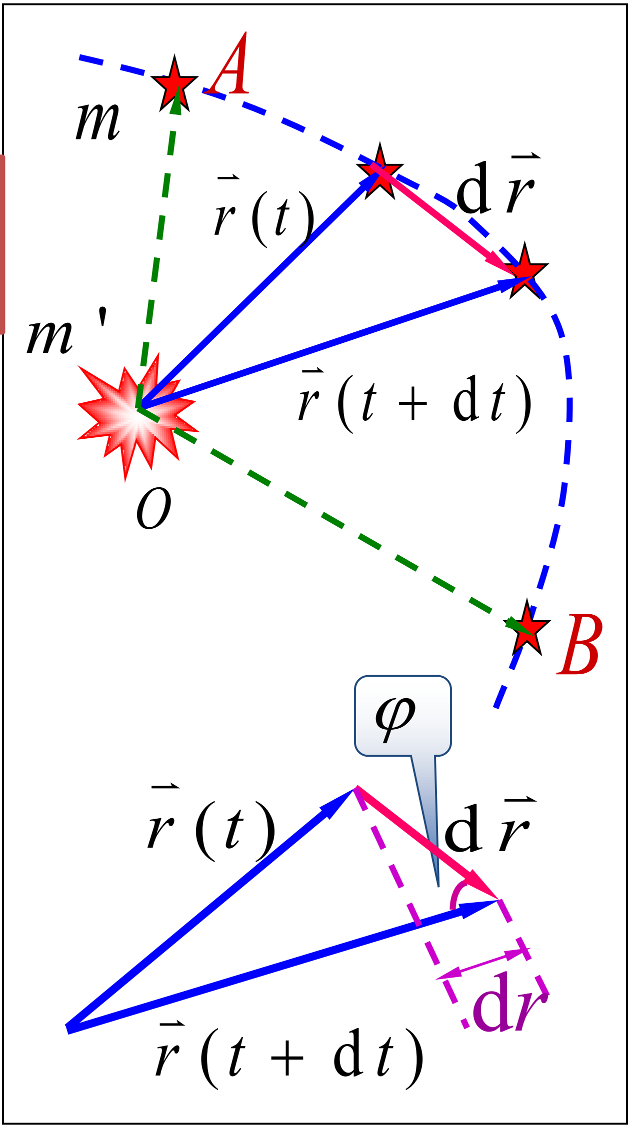
$$W=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_A^B -G\frac{m'm}{r^2}\overrightarrow{e_r}\cdot d\vec{r}$$

$$\boxed{\vec{e}_r\cdot d\vec{r}=|\vec{e}_r|\cdot|d\vec{r}|cos\varphi=dr}$$

$$W=\int_{r_A}^{r_B}-G\frac{m'm}{r^2}dr$$

$$W=-\left[(-G\frac{m'm}{r_B})-(-G\frac{m'm}{r_A})\right]$$

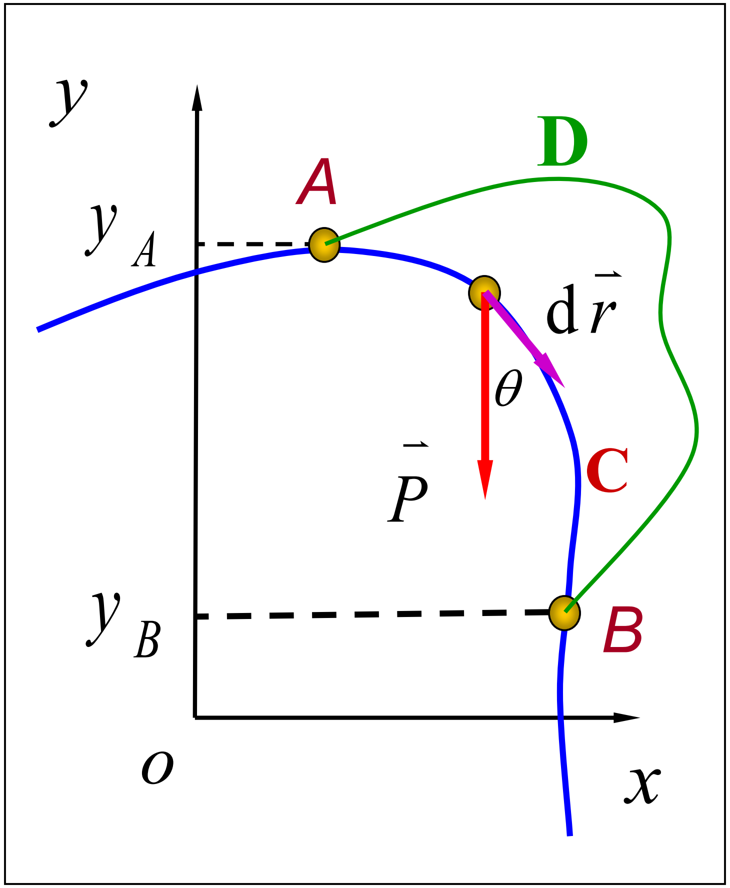
环路时：$W=\oint -G\frac{m'm}{r^2}dr\ =0$



与路径无关

2. 重力作功

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j}$$



$$\vec{P} = -mg\vec{j}$$

$$W = \int_A^B \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

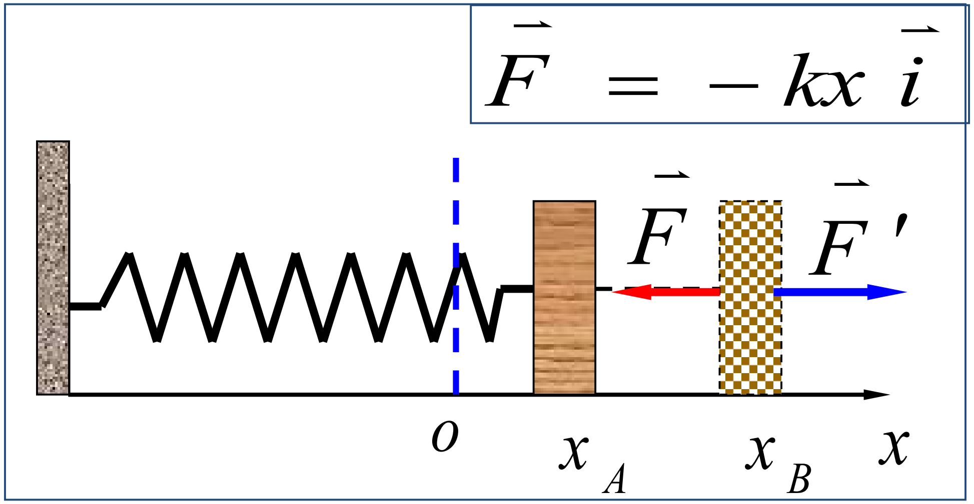
$$= \int_{y_A}^{y_B} -mg\,\mathrm{d}y$$

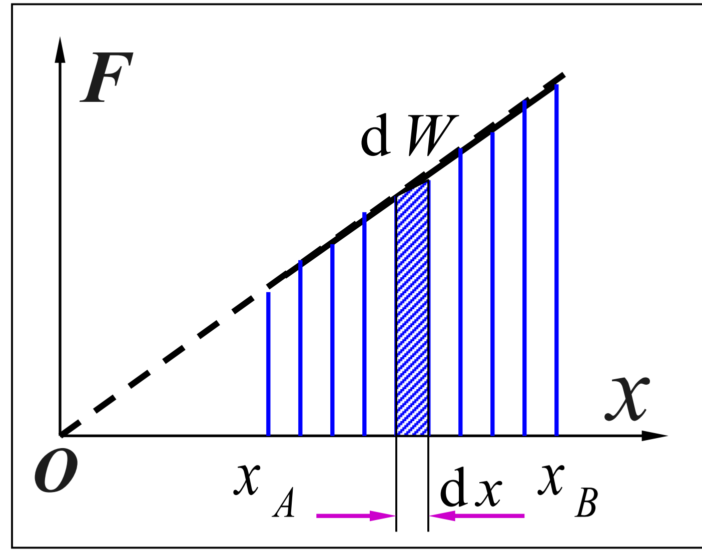
$$= -(mgy_B - mgy_A)$$

环路时：$W = \oint -mg\,\mathrm{d}y = 0$

与路径无关

3. 弹性力作功





$$W = \int_{x_A}^{x_B} F\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} -kx\,\mathrm{d}x$$

$$W = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right)$$

环路时：

$$W = \oint -kx\,\mathrm{d}x = 0$$

与路径无关

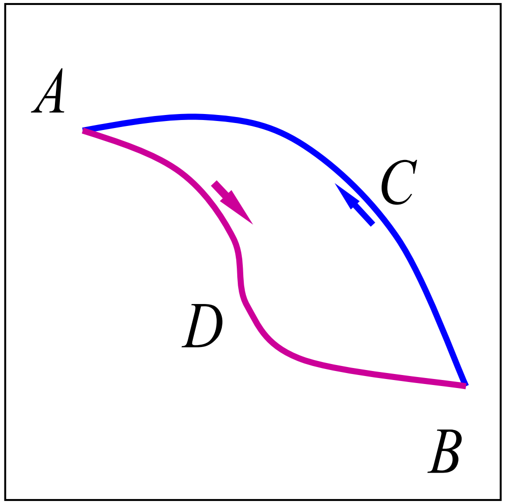
二　保守力和非保守力

保守力：力所作的功与路径无关，仅决定于相互作用质点的**始末相对位置**.

引力功 $W = -\left[\left(-G\frac{m'm}{r_B}\right)-\left(-G\frac{m'm}{r_A}\right)\right]$

重力功 $W = -(mgy_B - mgy_A)$

弹力功 $W = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right)$



物体沿闭合路径运动一周时，保守力对它所作的功等于零 .

非保守力：力所作的功与路径有关 .（例如摩擦力）

三 势能

势能（E_p）：由相互作用的物体的**相对位置**所确定的系统能量

势能的定义式

$$W_{ab}=\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-[E_p(\vec{r}_b)-E_p(\vec{r}_a)]$$

！！！

$$\boxed{dW=-dE_p}$$

含义:

保守力作功在数值上等于系统势能的减少，
保守力的功等于相应势能增量的负值。

注意：

（1）势能属于系统

（2）势能的大小只有相对的意义

（3）势能零点可以任意选取

取 r_0 点为势能零点，则任意一点 r 的势能为：

$$E_p(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_o} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

空间某点的势能 E_p 等于质点从该点移动到势能零点时保守力作的功。

重力势能：

$$E_{\mathrm{p}} = mgh$$ （ $\boldsymbol{h = 0}$ 为势能零点）

弹性势能：

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2$$ （弹簧自由端为势能零点）

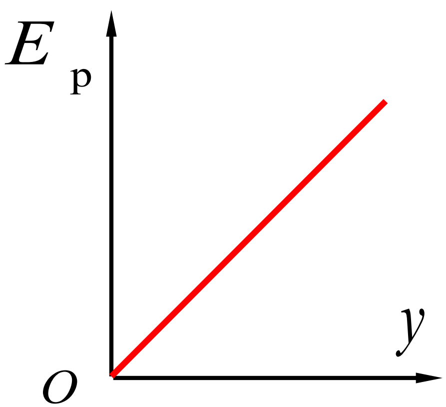
引力势能：

$$E_{\mathrm{p}} = -G\frac{Mm}{r}$$ （无限远处为势能零点）

四 势能曲线（势能的空间分布）

由势能函数确定的势能随坐标变化的曲线.

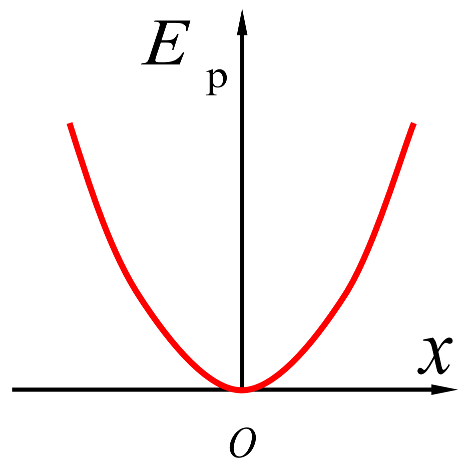
$$E_p = mgy$$



重力势能曲线

$y = 0, \quad E_p = 0$

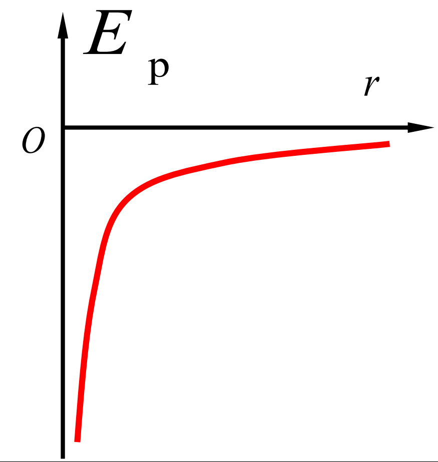
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$



弹性势能曲线

$x = 0, \quad E_p = 0$

$$E_p = -G\frac{m'm}{r}$$



引力势能曲线

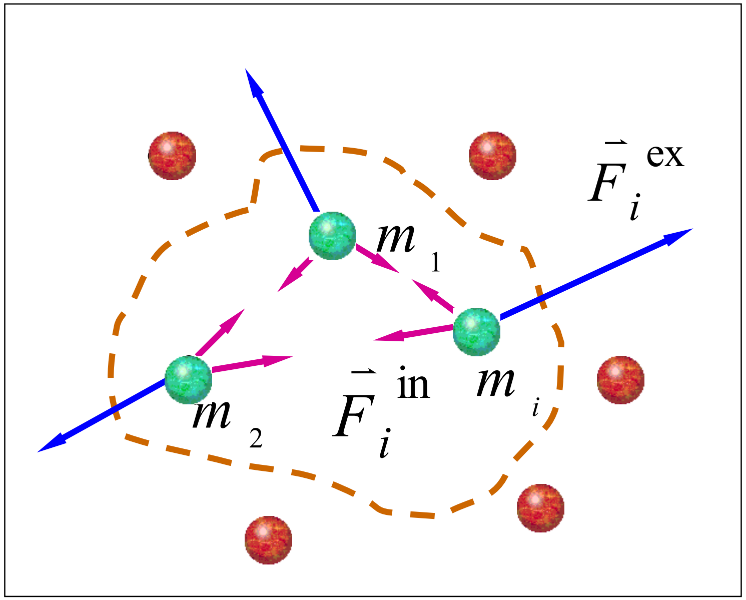
$r \to \infty, \quad E_p = 0$

大学物理（上）

3　动量守恒定律和能量守恒定律

3.6 功能原理 机械能守恒定律

一 质点系的动能定理



- 对第 i 个质点，有

$$W_{i外} + W_{i内} = E_{k2i} - E_{k1i}$$

对系统内所有质点求和

$$\sum_{i=1}^{n} W_{i内} + \sum_{i=1}^{n} W_{i外} = \sum_{i=1}^{n} E_{k2i} - \sum_{i=1}^{n} E_{k1i}$$

- **质点系动能定理** $W_{内} + W_{外} = E_{k2} - E_{k1}$

质点系动能的增量等于作用于系统的所有外力和内力做功的代数和。

注意 内力可以改变质点系的动能

二　质点系的功能原理

质点系动能定理　$W_{内} + W_{外} = E_{k2} - E_{k1}$

$$W_{外} + W_{保内} + W_{非保内} = E_{k} - E_{k0}$$

$$W_{保内} = E_{p0} - E_{p}$$

$$\boxed{W_{外} + W_{非保内} = (E_{k} + E_{p}) - (E_{k0} + E_{p0})}$$

机械能　$E = E_{k} + E_{p}$　　$\boxed{W_{外} + W_{非保内} = E - E_{0}}$

质点系的功能原理：质点系机械能的增量等于外力和非保守内力作功之和 .

三　机械能守恒定律

质点系的功能原理 $W_{外} + W_{非保内} = E - E_0$

当 $W_{外} + W_{非保内} = 0$ 时，有 $E = E_0$

机械能守恒定律：只有保守内力作功的情况下，非保守内力和一切外力都不做功，质点系的机械能保持不变．

守恒定律的意义

不究过程细节而能对系统的状态下结论，这是各个守恒定律的特点和优点．

孤立的保守系统机械能守恒。

机械能守恒定律只适用于惯性系。

大学物理（上）

3　动量守恒定律和能量守恒定律

3.7 碰撞

碰撞的两个特点:

1) 在碰撞的短暂时间内相互作用很强,可不考虑外界的影响.

2) 碰撞前后状态变化突然且明显,适合用守恒定律研究运动状态的变化.

完全弹性碰撞 两物体碰撞之后, 它们的动能之和不变. $E_{k} = E_{k1} + E_{k2} = C$

非弹性碰撞 由于非保守力的作用，两物体碰撞后，使机械能转换为热能、声能、化学能等其他形式的能量.

完全非弹性碰撞 两物体碰撞后以同一速度运动.

大学物理（上）

3　动量守恒定律和能量守恒定律

3.8 能量守恒定律

➢ 亥姆霍兹

– **1821—1894**
– 德国物理学家、生理学家
– 于**1847**年发表了《论力（现称能量）守恒》的演讲，首先系统地以数学方式阐述了自然界各种运动形式之间都遵守能量守恒这条规律. 所以说亥姆霍兹是能量守恒定律的创立者之一 .

对于一个与自然界无任何联系的系统来说，系统内各种形式的能量是可以相互转换的，但是不论如何转换，能量既不能产生，也不能消灭，这一结论叫做**能量守恒定律**．

1）生产和科学实验的经验总结；

2）能量是系统**状态**的函数；

3）系统能量不变，但各种能量形式可以互相**转化**；

4）能量的变化常用**功**来量度．

作业

- **P77：24； 27； 28**

例题和练习

例 对功的概念有以下儿种说法：

(1) 保守力作正功时，系统内相应的势能增加.

(2) 质点运动经一闭合路径，保守力对质点作的功为零.

(3) 作用力和反作用力大小相等、方向相反，两者所作功的代数和必为零.

(A) (1)、(2) 是正确的　　(B) (2)、(3) 是正确的

(C) 只有 (2) 是正确的　　(D) 只有 (3) 是正确的

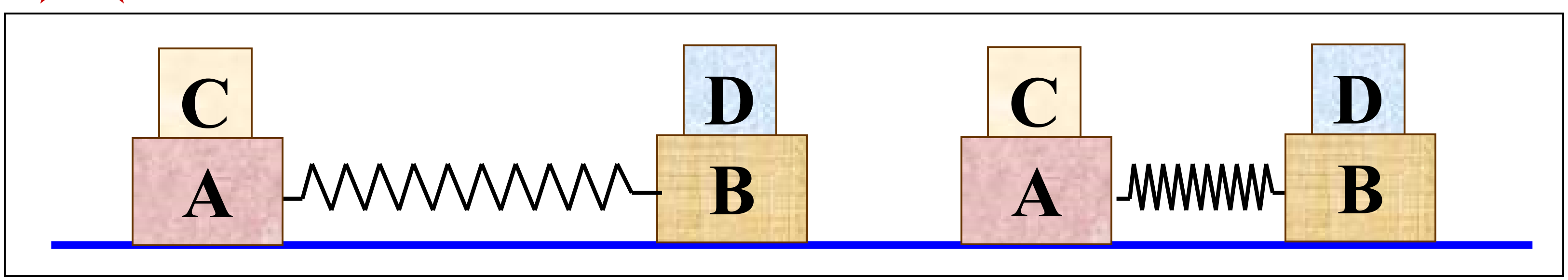
分析：（1）错.（保守力作正功时，系统相应的势能减少）.

（3）错.（作用力和反作用力虽然大小相等、方向相反，但两者所作功的代数和不一定为零；而等于力与两者相对位移的乘积.）

讨论

如图的系统，物体 A，B 置于光滑的桌面上，物体 A 和 C，B 和 D 之间摩擦因数均不为零，首先用外力沿水平方向相向推压 A 和 B，使弹簧压缩，后拆除外力，则 A 和 B 弹开过程中，对 A、B、C、D 组成的系统

（A）动量守恒，机械能守恒 .
（B）动量不守恒，机械能守恒 .
（C）动量不守恒，机械能不守恒 .
（D）动量守恒，机械能不一定守恒 .



例　一小球在竖直平面内作匀速圆周运动，则小球在运动过程中：

（A）机械能不守恒、动量不守恒、角动量守恒
（B）机械能守恒、动量不守恒、角动量守恒
（C）机械能守恒、动量守恒、角动量不守恒
（D）机械能守恒、动量守恒、角动量守恒

解：小球在竖直平面内作匀速圆周运动，其动能不变，势能改变，所以机械能不守恒。

小球在运动过程中，速度方向在改变，所以动量不守恒.

由于小球作匀速圆周运动，它所受的合力指向圆心，力矩为零，所以角动量守恒.

例 对机械能守恒和动量守恒条件的描述，正确的是：

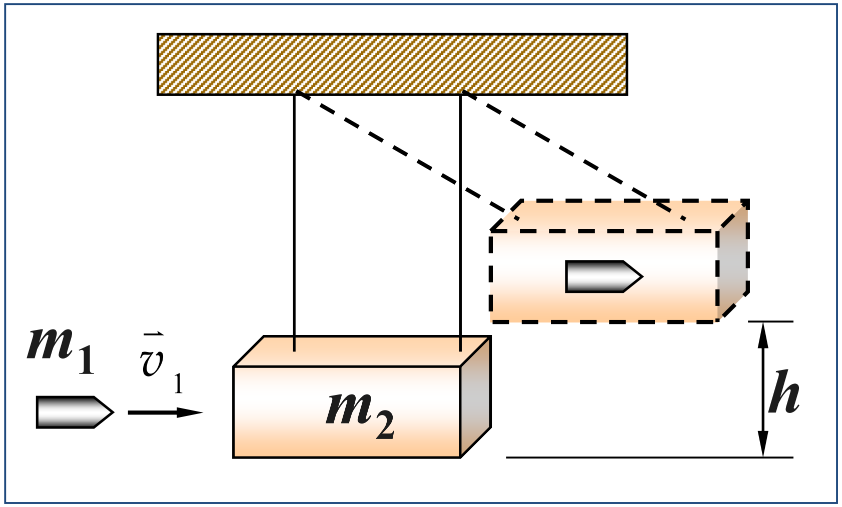
(1) 系统不受外力作用，则动量和机械能必定同时守恒.

(2) 对一系统，若外力作功为零，而内力都是保守力，则其机械能守恒.

(3) 对一系统，若外力作功为零，则动量和机械能必定同时守恒.

例1 冲击摆是一种测定子弹速率的装置．木块的质量为 m_2，被悬挂在细绳的下端． 有一质量为 m_1 的子弹以速率 v_1 沿水平方向射入木块中后，子弹与木块将一起摆至高度为 h 处．试求此子弹射入木块前的速率．

解 第一过程子弹与木快碰撞动量守恒



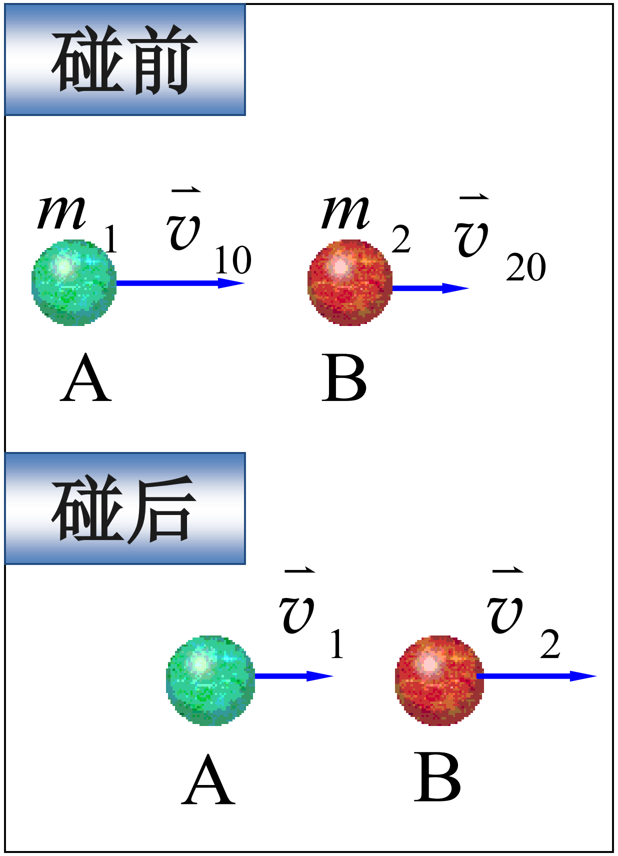
$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$

第二过程子弹、木块一块运动机械能守恒

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2^2 = (m_1 + m_2) gh$$

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}(2gh)^{1/2}$$

例 2 设有两个质量分别为 m_1 和 m_2，速度分别为 $\vec{v}_{10}$ 和 $\vec{v}_{20}$ 的弹性小球作对心碰撞，两球的速度方向相同. 若碰撞是完全弹性的, 求碰撞后的速度 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$.



解 取速度方向为正向，由动量守恒定律得

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$m_1 (v_{10} - v_1) = m_2 (v_2 - v_{20})$$

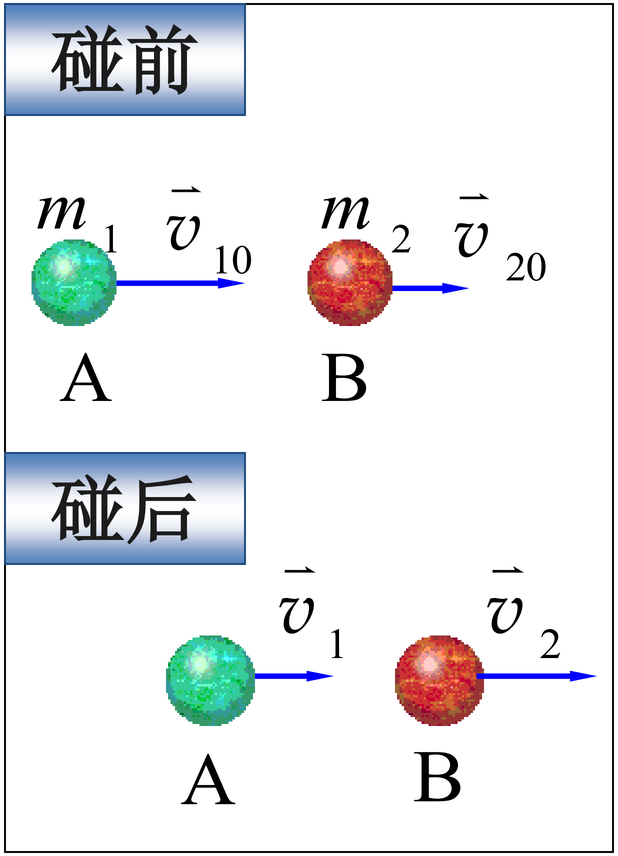
由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$m_1(v_{10}-v_1)=m_2(v_2-v_{20})$$

$$\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$m_1(v_{10}^2-v_1^2)=m_2(v_2^2-v_{20}^2)$$

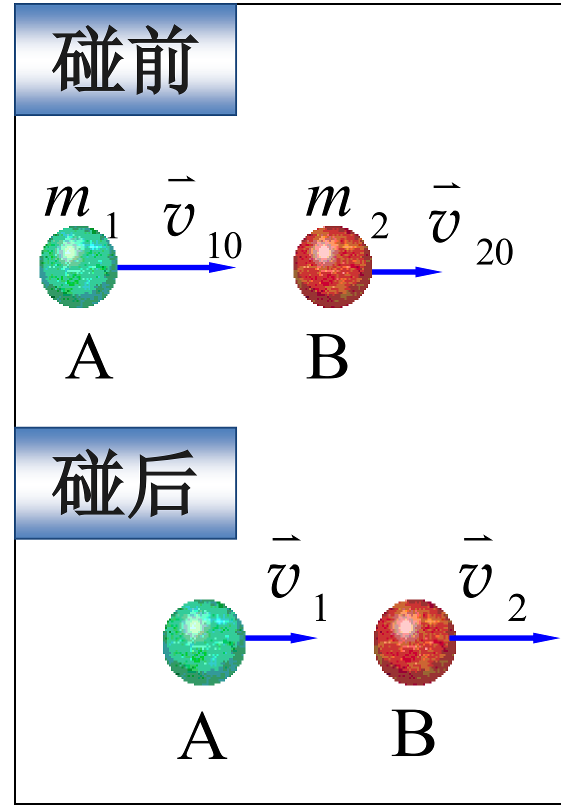


解得

$$v_1=\frac{(m_1-m_2)v_{10}+2m_2v_{20}}{m_1+m_2},\quad v_2=\frac{(m_2-m_1)v_{20}+2m_1v_{10}}{m_1+m_2}$$

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1 v_{10}}{m_1 + m_2}$$



讨 论

（1）若 $m_1 = m_2$ 则 $v_1 = v_{20}$ ，$v_2 = v_{10}$

（2）若 $m_2 >> m_1$ 且 $v_{20} = 0$ 则 $v_1 \approx -v_{10}$ ，$v_2 \approx 0$

（3）若 $m_2 << m_1$ 且 $v_{20} = 0$ 则 $v_1 \approx v_{10}$ ，$v_2 \approx 2v_{10}$

例3 一轻弹簧悬挂一金属盘，弹簧伸长 $l_1 = 10\ \text{cm}$ 一个质量和盘相同的泥球，从高于盘 $h = 30\ \text{cm}$ 处静止下落盘上，**求**盘向下运动的最大距离 L .

解： 本题分为三个过程

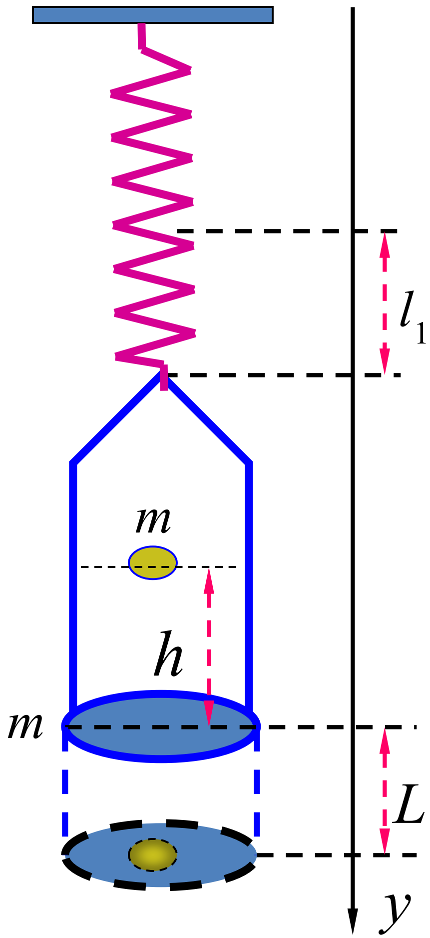
1 . 泥球下落（机械能守恒）

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 \qquad v = \sqrt{2gh}$$

2 . 泥球与盘碰撞（动量守恒）

$$mv = (m + m)V$$

$$V = {}^{v}\!/_{2} = \sqrt{gh / 2}$$



$$V = v/2 = \sqrt{gh/2}$$

3．泥球与盘一起下落（机械能守恒）

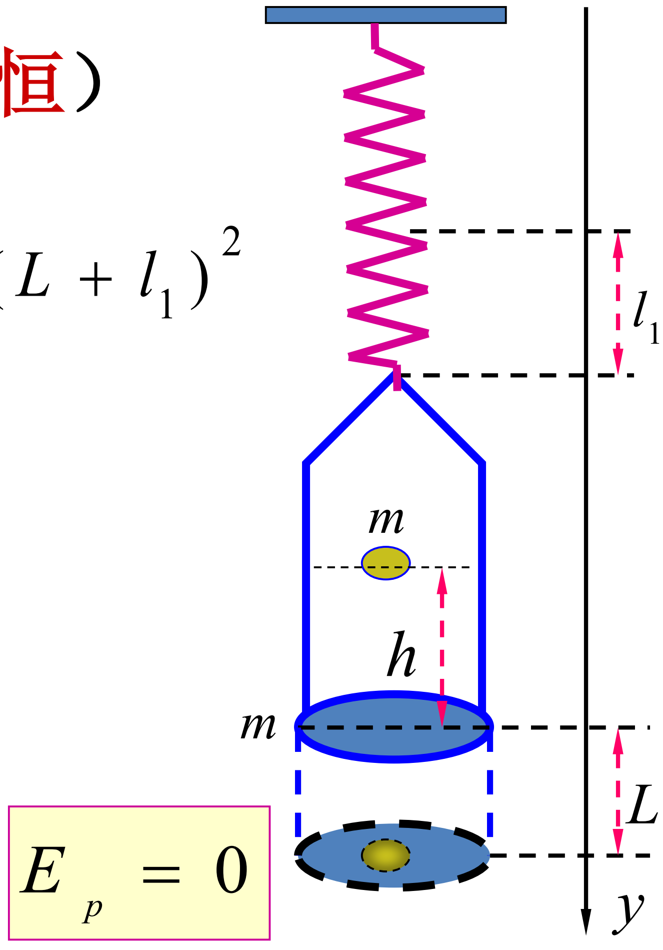
$$\frac{1}{2}(2m)V^2 + (2m)gL + \frac{1}{2}kl_1^2 = \frac{1}{2}k(L+l_1)^2$$

$$k = mg/l_1 \qquad V^2 = \frac{1}{2}gh$$

$$L^2 - 20L - 300 = 0$$

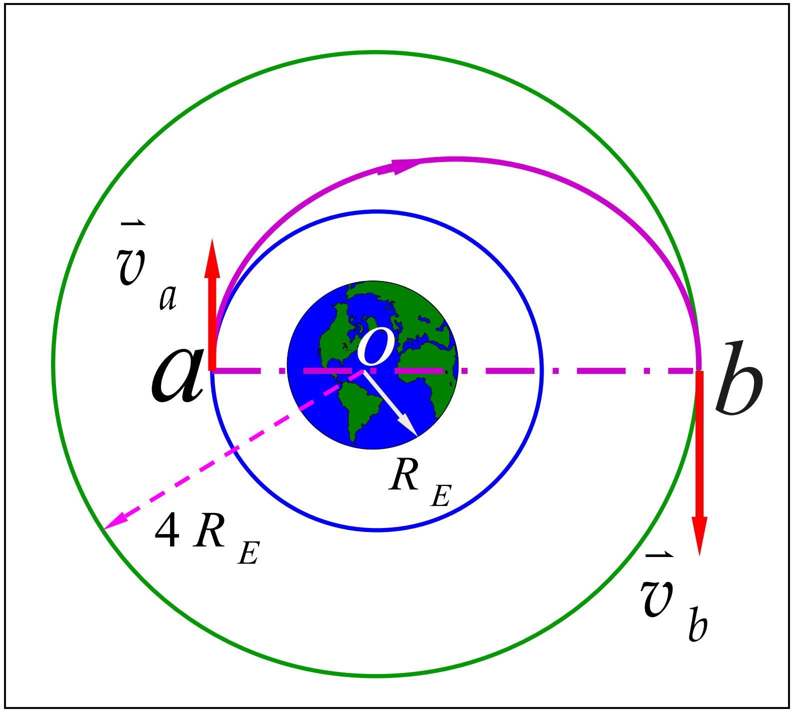
$$L = 30, \quad -10$$

$$\therefore L = 30\ \text{cm}$$



例1 已知地球的半径为 $R_E \approx 6.4\times10^3$ km，今有质量为 $m = 3.0\times10^3$ kg 的人造地球卫星从半径为 $2R_E$ 的圆形轨道上，经如图所示的半椭圆形轨道上的点 a 变轨至半径为 $4R_E$ 的另一个圆形轨道点 b 上．点 a 和点 b 处的椭圆轨道与圆轨道的切线相切．

试问：卫星完成了变轨过程后获得了多少能量？



解：由牛顿第二定律和万有引力定律

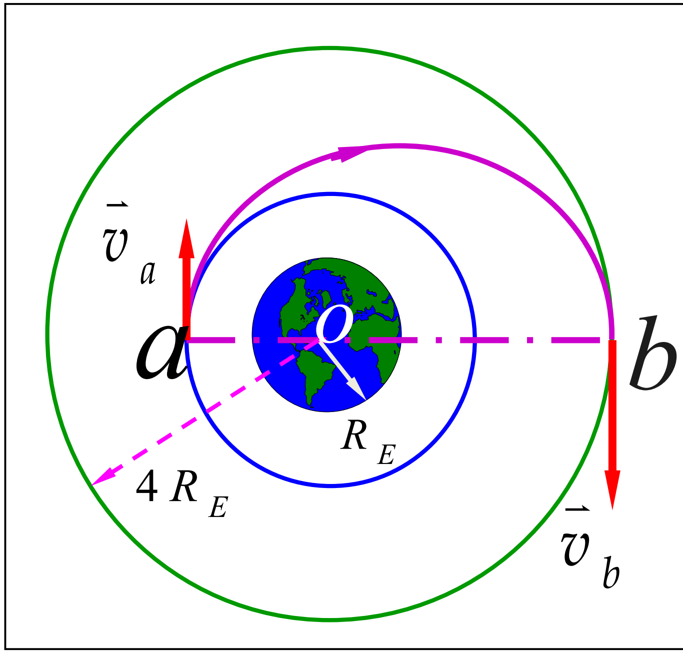
$$G\frac{m_E m}{(2R_E)^2} = m\frac{v_a^2}{2R_E}$$

已知：$R_E \approx 6.4\times10^3\,\mathrm{km}$，$m = 3.0\times10^3\,\mathrm{kg}$

$$G\frac{m_E m}{(2R_E)^2} = m\frac{v_a^2}{2R_E}$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv_a^2 = G\frac{m_E m}{4R_E}$$

同理 $$\frac{1}{2}mv_b^2 = G\frac{m_E m}{8R_E}$$



$$E_a = \frac{1}{2}mv_a^2 - G\frac{m_E m}{2R_E} = -\frac{1}{4}mgR_E$$

约束于引力场中，未摆脱地球影响

$$E_b = \frac{1}{2}mv_b^2 - G\frac{m_E m}{4R_E} = -\frac{1}{8}mgR_E$$

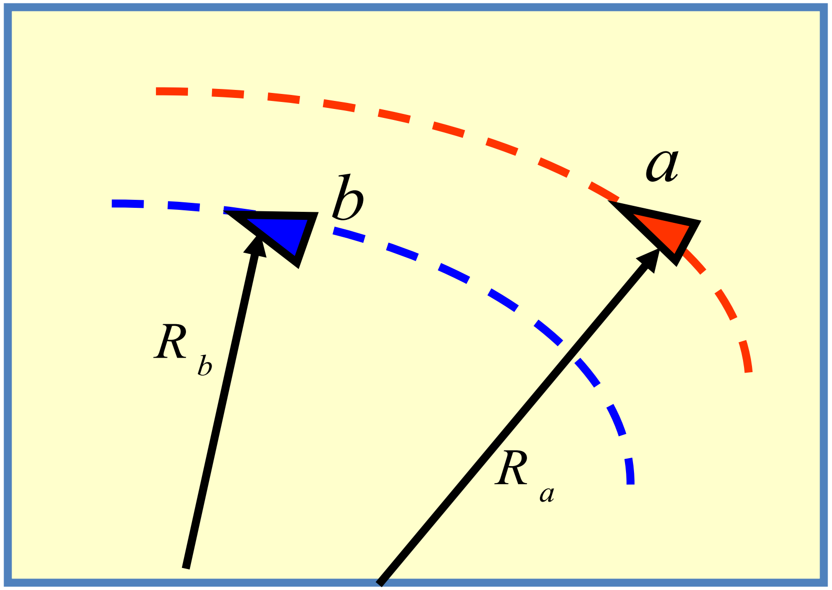
$$\Delta E = E_b - E_a$$

$$= \frac{1}{8}mgR_E$$

$$= 2.35\times10^{10}\ J$$

思考:卫星对接问题

设飞船 ***a*** 、***b*** 圆轨道在同一平面内，飞船 ***a*** 要追上 ***b***并与之对接，能否直接加速?



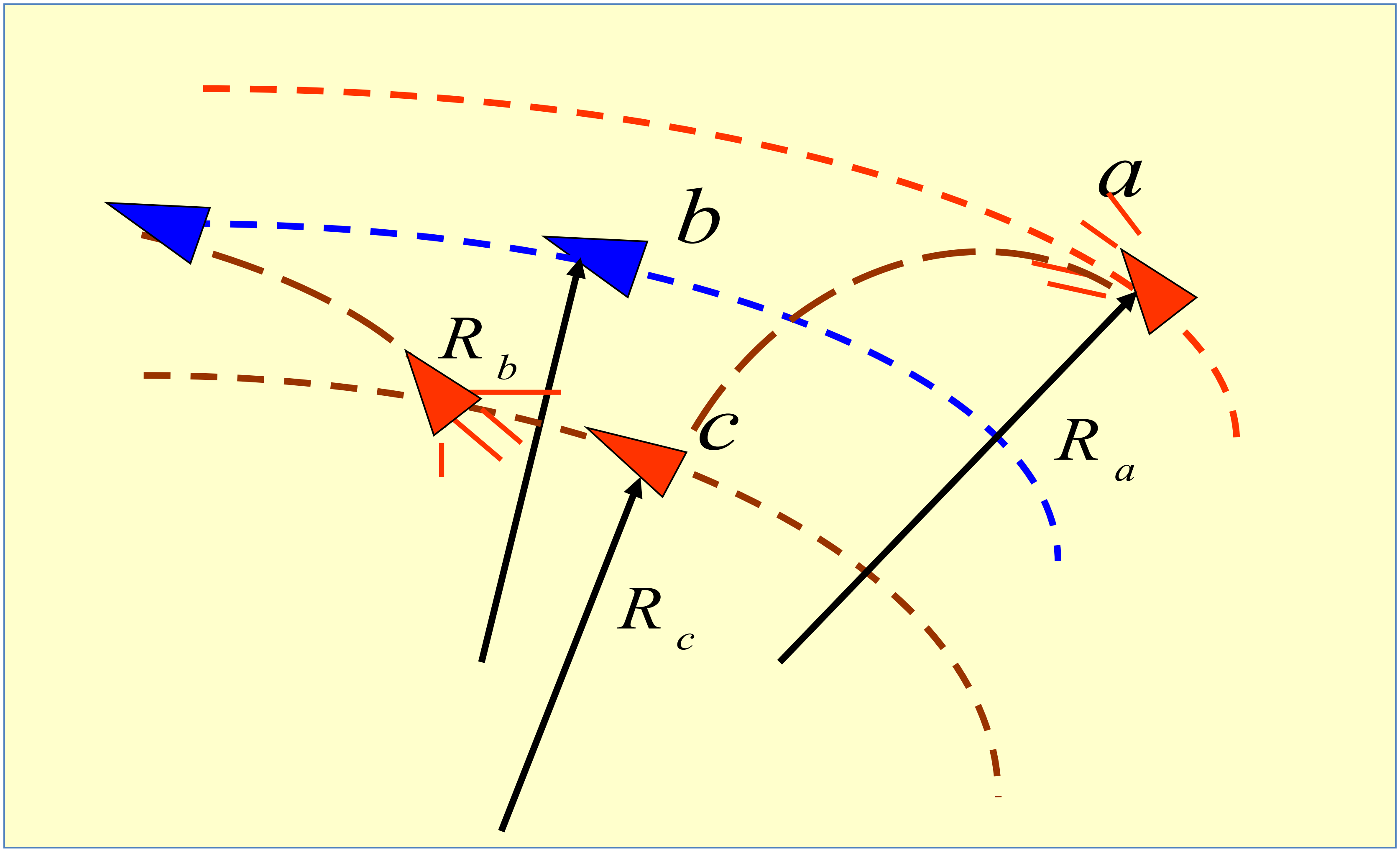
$$E = E_k + E_p$$

加速，发动机做功，$\Delta E>0$,

轨道半径R增大，不能对接;

方法: a 减速，$\Delta E<0$ $\xrightarrow{R\text{减小}}$ R_C轨道 $\xrightarrow{\text{加速}}$ R_b轨道

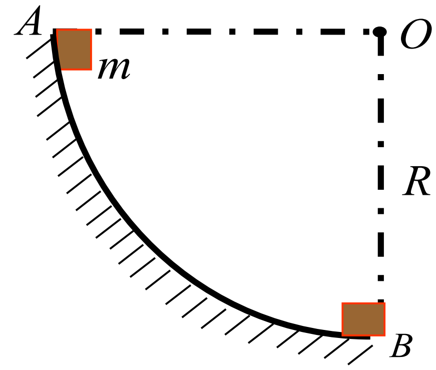
方法： $\left.\begin{array}{l} a\ \text{减速} \\ \Delta E<0 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{R\text{减小}}$ R_C轨道 $\xrightarrow{\text{加速}}$ R_b轨道



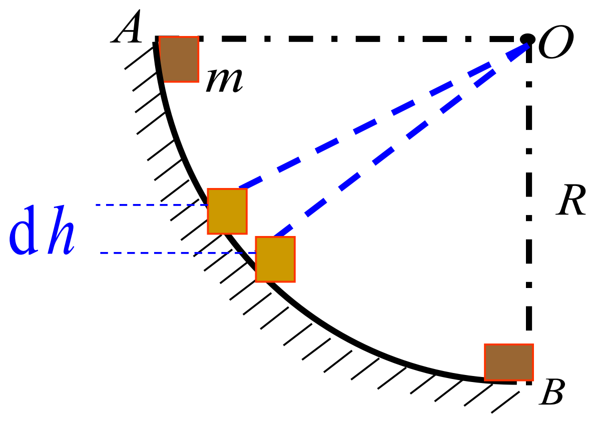
例 如图所示，质量$m = 2\text{kg}$的物体从静止开始，沿1/4圆弧从A滑到B，在B处速度的大小为$v = 6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。已知圆的半径$R = 4\text{m}$, 求物体从$A$到$B$的过程中

(1) 重力对它作的功。

(2) 摩擦力对它作的功。



解: (1) 重力的功 $\mathrm{d}A_{重力} = mg\,\mathrm{d}h$

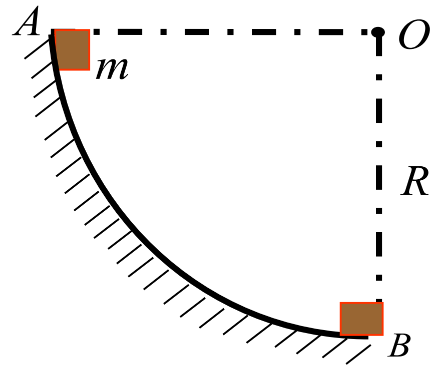


$$A_{重力} = \int_A^B mg\,\mathrm{d}h = mgR$$

$$= 2 \times 9.8 \times 4\,\text{J}$$

$$= 7.84\ \text{J}$$

(2) 以B点为重力势能零点，求摩擦力的功为



由功能原理 $A_{外} + A_{非保内} = \Delta E$ 得

因为 $A_{外} = 0$

$$A_{非保内} = A_{摩} + A_{支撑} = A_{摩}$$

所以 $A_{摩} = \frac{1}{2}mv^2 - mgR$

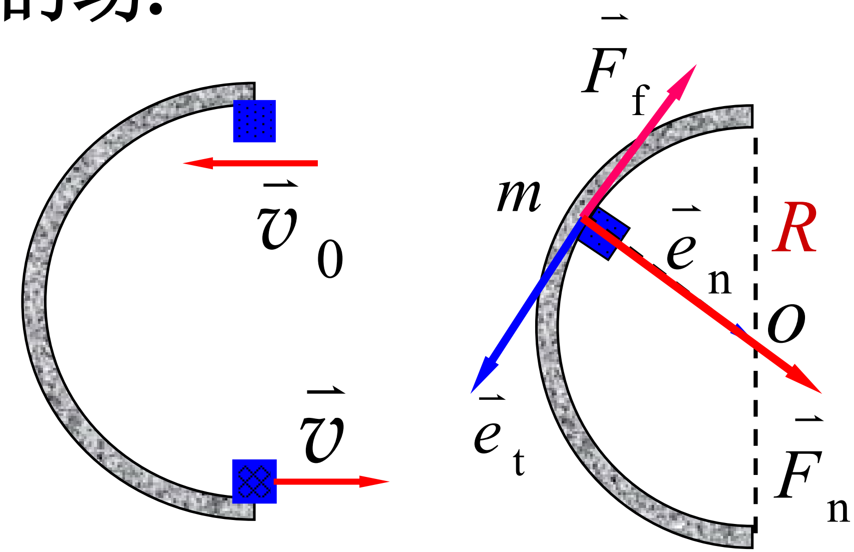
$$= (\frac{1}{2} \times 2 \times 6^2 - 2 \times 9.8 \times 4)\mathrm{J} = -42.4\ \mathrm{J}$$

例 在光滑水平桌面上，水平放置一固定的半圆形屏障，有一质量为 m 的滑块以初速度 v_0 沿切向进入屏障，设滑块与屏障间的摩擦系数为 μ，**求** 滑块从屏另一端滑出时，摩擦力所作的功.

解: 设圆半径为 R，

摩擦力 $\vec{F}_{\mathrm{f}}$，

屏障的作用力 $\vec{F}_{\mathrm{n}}$.



$$\because \vec{F}_{\mathrm{n}} \perp \mathrm{d}\vec{r} \quad \therefore W_{F_{\mathrm{n}}} = 0$$

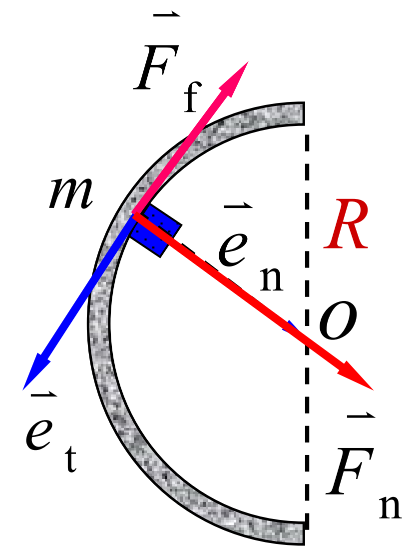
质点动能定理 $$W = W_{F_{\mathrm{f}}} = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

$$W_{F_f} = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$$

摩擦力 $F_f = \mu F_n$

$$-F_f = m \frac{dv}{dt} \qquad F_n = m \frac{v^2}{R}$$

$$F_f = -m \frac{dv}{dt} = -mv \frac{dv}{ds} = \mu m \frac{v^2}{R}$$

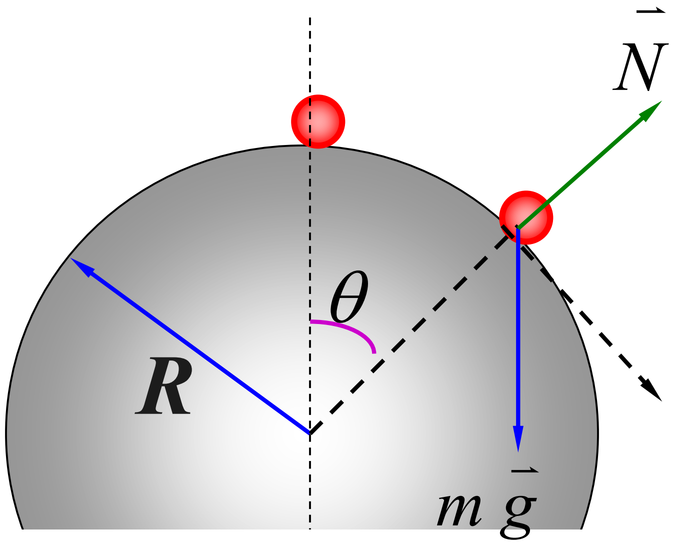


由 $\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\int_0^{\pi R} \frac{\mu}{R} ds$ 得 $\ln \frac{v}{v_0} = -\mu \pi$

$$v = v_0 e^{-\pi \mu}$$

摩擦力的功 $W = \frac{1}{2} m v_0^2 (e^{-2\pi\mu} - 1) < 0$

例 在半径为 ***R*** 的光滑球面的顶点处， 一质点开始滑动，取初速度接近于零，试问质点滑到顶点以下何处时脱离球面？



解： 脱离时 $N = 0$，在此过程中机械能守恒 .取球顶位置重力势能为零

$$\begin{cases} mg\cos\theta - N = m\dfrac{v^2}{R} \\ 0 = \dfrac{1}{2}mv^2 - mgR(1-\cos\theta) \end{cases}$$

$$\because N = 0$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{2}{3} \qquad \theta = \cos^{-1}\frac{2}{3}$$ 时，小球脱离大球.

例　质量为m的质点系在一端固定的绳子上,在粗糙水平面上作半径为R的圆周运动。当它运动一周时，由初速v_o减小为$v_o/2$。求:(1)摩擦力作的功;(2)滑动摩擦系数;(3)静止前质点运动了多少圈?

解：　★根据动能定理，摩擦力的功

$$W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}=\frac{1}{2}m(\frac{v_0}{2})^2-\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}=-(3/8)mv_0^{\ 2}$$

★因摩擦力 $f=\mu mg$ 方向与运动方向相反

$$\therefore W=\int_0^{2\pi R}f\cos\theta ds=-\int_0^{2\pi R}\mu mgds$$

$$=-\mu mg\cdot 2\pi R=-\frac{3}{8}mv_0^{\ 2}$$

可得

$$\mu = \frac{3v_0^2}{16\pi Rg}$$

✸设质点运动了***n***圈

$$\therefore \int_0^{n\cdot 2\pi R} f\cos\theta ds = -\int_0^{n\cdot 2\pi R} \mu mgds$$

$$= -n\mu mg \cdot 2\pi R$$

由动能定理有

$$-n\mu mg \cdot 2\pi R = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

可得

$$n = \frac{4}{3}$$ **(圈)**

版权声明